

目 錄

第 一 章	數與式	1-1
第 二 章	多項式函數	2-1
第 三 章	數列與級數	3-1
第 四 章	指數、對數	4-1
第 五 章	排列組合	5-1
第 六 章	機率	6-1
第 七 章	三角函數	7-1
第 八 章	複數	8-1
第 九 章	直線方程式與平面向量	9-1
第 十 章	空間向量與方程組	10-1
第十一章	矩陣	11-1
第十二章	二次曲線	12-1
第十三章	數據分析	13-1
第十四章	微積分	14-1





數 與 式

第 1 章



一、數系

◎實數系

1. 有理數：凡是可寫成 $\frac{q}{p}$ ，其中 p, q 為整數且 p, q 互質， $p \neq 0$ ，稱為有理數。
2. 無理數：凡是不可寫成 $\frac{q}{p}$ 者，稱為無理數。

$$\text{實數 } R \left\{ \begin{array}{l} \text{有理數 } Q \left\{ \begin{array}{l} \text{整數 } Z \left\{ \begin{array}{l} \text{正整數 } N: 1, 2, 3, \dots \\ \text{零}: 0 \\ \text{負整數}: -1, -2, -3, \dots \end{array} \right. \\ \text{分數}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{10}{11}, \frac{1}{2}, \dots \\ \text{有限小數}: 1.23, -2.57, 7.6, \dots \\ \text{循環小數}: 0.1\overline{7}, 4.\overline{3}, 4.245\overline{6} \end{array} \right. \\ \text{無理數}: \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e, 0.31215312648\dots \end{array} \right.$$

二、絕對值

$|x|$ 表示數線上點 x 與原點間的距離。

若 a, b 為實數，則 $|a| = \begin{cases} a, & \text{當 } a \geq 0 \\ -a, & \text{當 } a < 0 \end{cases}$

$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & \text{當 } a \geq b \\ b - a, & \text{當 } a < b \end{cases}$$

三、分數與小數之運算

若 a, b 為整數，且 $b \neq 0$ 或 ± 1 ，則 $\frac{a}{b}$ 稱為分數。

(一) 分數相加減：

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

(二) 分數乘除運算：

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

(三)同分母的分數就比較分子，分子越大，其值越大。

同分子的分數就比較分母，分母越大，其值越小。

(四)若 $\frac{a}{b}$ 為真分數， a 、 b 、 c 為正整數且 $b \neq c$ ，則 $\frac{a-c}{b-c} < \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ 。

例如： $\frac{7}{8} < \frac{11}{12} < \frac{15}{16}$ 。

若 $\frac{a}{b}$ 為假分數， a 、 b 、 c 為正整數且 $b \neq c$ ，則 $\frac{a-c}{b-c} \geq \frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c}$ 。

例如： $\frac{4}{3} > \frac{5}{4} > \frac{6}{5}$ 。

(五)設 $\frac{a}{b}$ 為最簡分數，化為小數的判別法：

1. 分母 b 只含 2 或 5 兩種質因數：可化成有限小數。

2. 其他：無限小數。

四、因數的判別法

(一)含因數 2：

末位是偶數。

(二)含因數 3：

所有數字和為 3 的倍數。

(三)含因數 4

末兩位為 4 的倍數。

(四)含因數 5：

個位數為 0 或 5。

(五)含因數 9：

數字和為 9 的倍數。

(六)含因數 11：

奇數位的數字和減偶數位的數字和 = 11 的倍數。

五、最大公因數、最小公倍數的求法

(一)觀察法。

(二)質因數分解法。

(三)輾轉相除法。



EX

1

➡(A)

設 a 為有理數， b 為無理數，則下列何者正確？

(A) $a + b$ 必為無理數(B) ab 必為無理數(C) $\frac{a}{b}$ 必為無理數(D) $b\sqrt{a}$ 必為無理數 【警專 34 期乙組】

解：(A) 有理數 + 無理數必為無理數

(B) $0 \times \sqrt{3} = 0$ 為有理數(C) $\frac{0}{\sqrt{3}} = 0$ 為有理數(D) $(\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 2$ 為有理數

EX

2

➡(A)(B)(E)

下列哪些選項中的數是有理數？

(A) 3.14

(B) $3.1\bar{4}$ (C) π (D) $\sqrt{5}$ (E) $\log \sqrt[3]{2} + \log \sqrt[3]{5}$

【警專 34 期乙組】

解：可以化成分數的即為有理數

$$\text{其中 (E) } \log \sqrt[3]{2} + \log \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3} \log 2 + \frac{1}{3} \log 5 = \frac{1}{3} (\log 2 + \log 5) = \frac{1}{3} \log 10 = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ (A)(B)(E) 為有理數

EX

3

➡(B)

設 x, y 是兩有理數，已知 $(2 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y = -3\sqrt{3}$ ，則數對 (x, y) 為下列哪一個選項？

(A) (1, 2)

(B) (-1, 2)

(C) (2, 1)

(D) (-2, 1)

【警專 35 期乙組】

解： $(2 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y = (2x + y) + (x - y)\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = -3 \end{cases} (x, y) = (-1, 2)$$

EX 4

⊙(C)

若 $\sqrt{11-\sqrt{72}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $b + \frac{1}{a-b} = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 【警專 34 期乙組】

解： $\sqrt{11-\sqrt{72}} = \sqrt{11-2\sqrt{18}} = \sqrt{9} - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} = 1 + (2 - \sqrt{2})$

$\therefore a = 1, b = 2 - \sqrt{2}$

$\Rightarrow b + \frac{1}{a-b} = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 3$

EX 5

⊙(B)

已知有理數 x, y 滿足 $x\sqrt{6-\sqrt{20}} + y\sqrt{9+4\sqrt{5}} = 5 + \sqrt{5}$ ，則數對 (x, y) 為下列哪一個選項？

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, 2)$ (C) $(-1, 3)$ (D) $(-1, 4)$

【警專 36 期乙組】

解： $\sqrt{6-\sqrt{20}} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$

$\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{9+2\sqrt{20}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{4})^2} = \sqrt{5}+2$

所以 $x\sqrt{6-\sqrt{20}} + y\sqrt{9+4\sqrt{5}} = (-x + 2y) + \sqrt{5}(x + y) = 5 + \sqrt{5}$

得 $-x + 2y = 5$ 且 $x + y = 1$

$\Rightarrow x = -1, y = 2$

EX 6

⊙(C)

設 $x = \sqrt{9+\sqrt{257}}$ ，則 x 之值在哪兩個連續整數之間？

- (A) 3 與 4 (B) 4 與 5 (C) 5 與 6 (D) 6 與 7

【警專 36 期乙組】

解： $\sqrt{257} = 16.xxx$ ，所以 $\sqrt{9+\sqrt{257}} \approx \sqrt{25} \approx 5.xxx$

EX 7

⊙(B)

設 a, b 皆為實數，且 $a < b$ ，則下列哪一個數最大？

- (A) $\frac{a+b}{2}$ (B) $\frac{a+2b}{3}$ (C) $\frac{2a+b}{3}$ (D) $\frac{2a+3b}{5}$

【警專 34 期乙組】



解：因為 $a < b$ ，令 $a = 1$ ， $b = 2$

$$(A) \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(B) \frac{a+2b}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$(C) \frac{2a+b}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$(D) \frac{2a+3b}{5} = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5}$$

所以(B)最大

EX 8

→(C)

設 n 為自然數， $\frac{n}{7} < \sqrt{11} < \frac{n+1}{7}$ ，則 n 之值為：

(A) 21

(B) 22

(C) 23

(D) 24

【警專 31 期甲組】

解： $\sqrt{11} \approx 3.3$ ，故 $n = 3.3 \times 7 = 23.1$ ，所以 $n = 23$ 。

EX 9

→(A)

設 a, b 均為實數且滿足 $\sqrt{2a+b-4} + (3a-b-1)^2 = 0$ ，則 $a+b = ?$

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6 【警專 33 期乙組】

解：
$$\begin{cases} 2a+b-4=0 \\ 3a-b-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a+b=3$$

EX 10

→(A)

試問有多少組整數數對 (x, y) 滿足方程式 $|x+1| + 2|y+3| = 4$ ？

(A) 8

(B) 10

(C) 12

(D) 14

【警專 35 期甲、丙組】

解：可能 A： $|x+1| = 0, 2|y+3| = 4$ ，則有 2 種情況

可能 B： $|x+1| = 2, 2|y+3| = 2$ ，則有 4 種情況

可能 C： $|x+1| = 4, 2|y+3| = 0$ ，則有 2 種情況

所以共有 8 種情況

EX 11

→(C)

若 $756 = 2^a \times 3^b \times 7^c \times 11^d$ ，則 $a+b+c+d = ?$

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

【警專 20 期甲組】

解： $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7^1 \times 11^0$



EX 12

→(C)

下列何者是 3 的倍數？

- (A)
- 7231×251
- (B)
- $216^3 + 712^3$
- (C)
- $124^3 - 214^3$
- (D)
- $3^{1999} + 1$

【警專 30 期甲組】

解：(A) 7231 與 251 皆非 3 的倍數；(B) 216 為 3 的倍數，但 712 不是
(C) 124 除以 3 餘 1，214 除以 3 餘 1；(D) 不為 3 的倍數

EX 13

→(B)(C)(E)

下列哪些數字是 9 的倍數？

- (A)
- $10^{27} + 1$
- (B)
- $10^{80} - 1$
- (C)
- 3^{20}
- (D) 123456

- (E)
- 345×87321

【警專 24 期乙組】

解：(A) $1 + 1 = 2$ 不為 9 的倍數；(B) 展開後為 79 個 9
(C) $3^{20} = 9^{10}$ ；(D) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ 不為 9 的倍數
(E) 345 有 3 的因數，87321 也有 3 個因數

EX 14

→(A)

設 n 為整數，則使 $\frac{65}{2n-5}$ 為正整數的所有 n 的總和為：

- (A) 52 (B) 54 (C) 56 (D) 58

【警專 26 期乙組】

解：65 的因式有 $\pm 1, \pm 5, \pm 13, \pm 65$ ，但此題僅取正值
所以 $2n - 5 = 1, 5, 13, 65 \Rightarrow n = 3, 5, 9, 35$

EX 15

→(A)(D)(E)

下列敘述何者正確？

- (A) 911 為質數 (B) 1 為質數
-
- (C) -5 為質數 (D) 333333 之質因數有 5 個
-
- (E) 若
- $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- 則
- $10!$
- 之質因數有 4 個

【警專 27 期乙組】

解：(A) $\sqrt{911} = 30 \dots$ ；(B)(C) 質數需大於 1
(D) $333333 = 3^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$ ；(E) 質因數有 2, 3, 5, 7 共 4 個



EX 16

⊖(A)(B)(D)

下列敘述哪些是正確的？

(A) 已知 n 為正整數，若有理數 $\frac{n}{5,250}$ 可以化為有限小數，則 n 必為 21 的倍數(B) 若 a, b 為實數且 $a + b$ 為有理數、 ab 為無理數，則 $a - b$ 必為無理數(C) 若 a, b 為實數且 $a^2 - b^2, a + b$ 皆為有理數，則 $a - b$ 必為有理數(D) 若 a^3, a^5 皆為有理數，則 a^{2018} 必為有理數(E) 若 a, b, c, d 為實數且滿足 $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ ，則 $a = c$ 且 $b = d$

【警專 37 期甲組】

解：(A) $5,250 = 2 \times 5^3 \times 3 \times 7 \Rightarrow n$ 必為 21 的倍數(B) $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2} \Rightarrow a^2 - b^2 = 0$ 且 $a + b = 0$ 均為有理數，但 $a - b = 2\sqrt{2}$ 為無理數(C) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \Rightarrow a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ 必為有理數(D) $a^{2018} = (a^5)^{403} \cdot a^3 \Rightarrow a^{2018}$ 必為有理數(E) 若 a, b, c, d 為有理數才對

EX 17

⊖(A)(B)(C)

試判斷下列哪些選項中的有理數可以化成有限小數？

(A) $\frac{8}{40}$ (B) $\frac{51}{85}$ (C) $\frac{123}{128}$ (D) $\frac{5}{85}$ (E) $\frac{3}{21}$

【警專 37 期乙組】

解：(A) $\frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0.2$ ；(B) $\frac{51}{85} = \frac{3}{5} = 0.6$ ；(C) $\frac{123}{128} = 0.9609375$ ；(D) $\frac{5}{85} = \frac{1}{17}$ (E) $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

EX 18

⊖(A)(C)(E)

下列選項中的數，哪些是無理數？

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{169}$ (C) $\frac{4\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{48}}$ (E) π

【警專 38 期乙組】



解：(B) $\sqrt{169} = 13$ 為有理數

(D) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \frac{1}{16}$ 為有理數

選(A)(C)(E)



1. 設 $\sqrt{13+4\sqrt{3}} = a + b$ ，其中 a 為整數， $0 \leq b < 1$ ，則 a 之值為何？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【警專 30 期乙組】

2. 設 $a, b, c \in \mathbb{N}$ ，若 $a : b : c = 4 : 3 : 2$ ，且 a, b, c 的最小公倍數為 120，則 a, b, c 的最大公因數為：

- (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 10

【警專 22 期乙組】

3. 設 a, b 都是正整數，且 $a + b = 176$ ， $[a, b] = 330$ ，則 a, b 的最大公因數為何？

- (A) 11 (B) 22 (C) 33 (D) 66

【警專 30 期乙組】

4. $\sqrt{9+2\sqrt{20}}$ 最接近哪一個正整數？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

【警專 33 期乙組】

5. $\sqrt{91} - \sqrt{37}$ 介於連續正整數 n 與 $n + 1$ 之間，則 n 之值為下列哪一個選項？

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

【警專 34 期甲組】

6. 設 a 為負數，則 $|a + 2|a||$ 之值為何？

- (A) a (B) $-a$ (C) $2a$ (D) $3a$

【警專 20 期甲組】

7. $6666 \times 7777 + 8888$ 被 9 除的餘數為何？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【警專 26 期甲組】

8. $\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \dots, \frac{100}{100}$ 這 100 個分數中，有幾個是最簡分數？

- (A) 36 (B) 40 (C) 44 (D) 48

【警專 24 期甲組】

9. 「大於 1 的正整數 a 如果找不到不大於 $\sqrt{a}$ 的質因數，則 a 就是質數」，下列何者是質數？



(A) 277

(B) 157

(C) 361

(D) 667

(E) 271

【警專 26 期乙組】