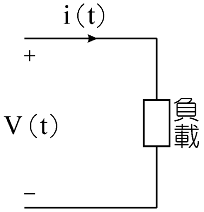

目
錄
Contents

1-1 單相交流功率

若負載端或電源端之電壓與電流分別為：



$$V(t) = V_m cos(\omega t + 0°)$$
$$i(t) = I_m cos(\omega t - \theta)$$

則其瞬間功率：

$$P(t) = V(t)i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \times \frac{I_m}{\sqrt{2}} \times 2 \times cos(\omega t + 0°)cos(\omega t - \theta)$$

$$P(t) = |V||I|〔cos(2\omega t - \theta) + cos\theta〕$$
$$= |V||I|(cos2\omega t\, cos\theta + sin2\omega t\, sin\theta + cos\theta)$$
$$= |V||I|cos\theta(1 + cos2\omega t) + |V||I|sin\theta\, sin2\omega t$$

瞬時有效功率 $P_R(t) = |V||I|cos\theta(1 + cos2\omega t)$

瞬時無效功率 $P_x(t) = |V||I|sin\theta\, sin2\omega t$

其中 $\begin{cases} \text{電壓有效值}|V| = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}} \\ \text{電流有效值}|I| = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} \end{cases}$

定義：負載或電源之功率因數爲電壓與電流相角差之餘弦值

$\theta = \angle\vec{V} - \angle\vec{I}$ **，電壓與電流之相角差（功率因數角）**

功率因數 $cos\theta = cos(\angle\vec{V} - \angle\vec{I})$

∴平均功率（有效功率、實功率）

$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = |V||I|cos\theta$ （W**，瓦**）

無效功率或虛功率 $Q = |V||I|sin\theta$ （VAR**，乏**）

視在功率 $S = |V|\,|I|$（VA，**伏安**）

經典試題

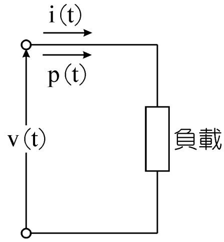
1、一單相負載由 416V 之輸電線吸收功率因數為 0.9 落後之電力 10kW，試求視在功率 $\vec{S} = P + jQ$ 及電流 $|I|$。　　【專技高考】

Sol (1)視在功率 $\vec{S} = P + jQ = P + jPtan\theta = 10kW + j10tan\,cos^{-1}0.9$

$= 10 + j4.84$（kVA）

(2)電流大小 $|I| = \dfrac{P}{|V|\,cos\theta} = \dfrac{10\times10^3}{416\times0.8} = 26.7$（$A$）

2、如右圖，電壓與電流之瞬時值 $v(t) = V_{max}\,cos(\omega t)$ 及 $i(t)I_{max}cos(\omega t - \theta)$。



(1)試寫出瞬時功率 $p(t)$ 之表示式，表示式中須分成瞬時實功率 $p_R(t)$ 及瞬時虛功率 $p_L(t)$ 兩部分，並請說明如何分離出此兩部分及其理由。

(2)瞬時實功率值與瞬時虛功率值是否有可能為負值？並說明其理由。

(3)試問其平均實功率值與平均虛功率值各為多少？　　【102.關務三等】

Sol (1)瞬時功率 $p(t) = v(t)i(t) = V_m\,cos\omega t \cdot I_m\,cos(\omega t - \theta)$

$$= \frac{V_mI_m}{2} \cdot 2cos\omega t \cdot cos(\omega t - \theta)$$

$$= \frac{V_mI_m}{2}\left[cos(2\omega t - \theta) + cos\theta\right]$$

$$= \frac{V_mI_m}{2}\left[cos2\omega t\,cos\theta + sin2\omega t\,sin\theta + cos\theta\right]$$

$$= \frac{V_mI_m}{2}cos\theta\,(1 + cos2\omega t) + \frac{V_mI_m}{2}sin\theta \cdot sin2\omega t$$

$$= P_R(t) + P_X(t)$$

∴瞬時實功率 $P_R(t) = \dfrac{V_mI_m}{2}cos\theta\,(1 + cos2\omega t)$ = 流入電路之功率

瞬時虛功率 $P_X(t) = \frac{V_m I_m}{2} sin\theta \cdot sin2\omega t$ = 電路借入及歸還之功率

⑵∵ $cos2\omega t$ 介於 -1 至 1，則瞬時實功率 $P_R(t) \geq 0$，$sin2\omega t$ 介於 -1 至 1，則瞬時虛功率可能為負值

⑶平均實功率 $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{V_m I_m}{2} cos\theta$

平均虛功率 $Q = \frac{V_m I_m}{2} sin\theta$

3、電壓 $200\angle 0° V_{rms}$ 頻率 $60Hz$ 的工廠，有兩組機具並聯運轉，一組機具阻抗為 $5 - j3\Omega$，另一組機具的功因為 0.8 落後並消耗實功 $8kW$：

⑴請問此工廠整廠的功因為何？

⑵此工廠需要並聯第三組電感性機具，要維持功因在 0.95 以上，新增電感性負載的限制是多少亨利？ 【104.鐵路高員】

Sol ⑴機具 1 之複功率 $\overrightarrow{S_1} = \frac{|V|^2}{\overrightarrow{Z_1}^*} = \frac{200^2}{5+j3} = \frac{200^2 \times (5-j3)}{34}$

$= 5.882 - j3.529$（kVA）

機具 2 之複功率 $\overrightarrow{S_2} = P_2 + jQ_2 = 8 + j8tan(cos^{-1}0.8) = 8 + j6$（$kVA$）

∴工廠整廠之複功率 $\overrightarrow{S_T} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} = 13.882 + j2.471$（$kVA$）

∴功率因數 $cos\theta = \frac{P_T}{\sqrt{P_T^2 + Q_T^2}} = \frac{13.882}{\sqrt{13.882^2 + 2.471^2}} = 0.9845$（落後）

⑵今並聯電感性負載 $\overrightarrow{S_3} = jQ_L$，維持功因為 0.95 以上，則：

$$0.95 = \frac{13.882}{\sqrt{13.882^2 + (2.471 + Q_L)^2}}$$

$\therefore Q_L = 2.091$（$kVAR$）$= \frac{|V|^2}{X_L} \Rightarrow X_L = 19.13$（$\Omega$）$= 377L$

故 $L = 0.0507$（H）

1-2 複　功　率

若負載端之電壓與電流分別為：

$V(t) = V_m cos(\omega t + \alpha)$，$i(t) = I_m cos(\omega t + \beta)$

電壓、電流之相量式 $\begin{cases} \vec{V} = |V| \angle\alpha \text{，} |V| = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}} \\ \vec{I} = |I| \angle\beta \text{，} |I| = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} \end{cases}$

負載所消耗之複功率：

$$\vec{S} = \vec{V}\ \vec{I}^* = \vec{V}^*\left(\frac{\vec{V}^*}{\vec{Z}^*}\right) = \frac{|V|^2}{\vec{Z}^*} = |V|\angle\alpha \cdot |I|\angle{-\beta} = |V|\,|I|\angle(\alpha-\beta)$$

$$= |V|\,|I|cos(\alpha-\beta) + j|V|\,|I|sin(\alpha-\beta) = P + jQ$$

充電補給站

$\theta = \angle\vec{V} - \angle\vec{I} = \alpha - \beta$

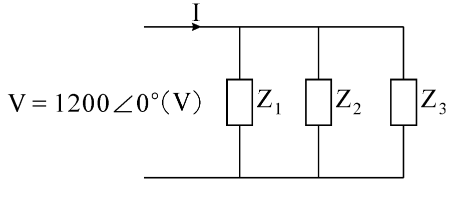
⑴若（$\alpha - \beta$）> 0 ⇒ 電壓越前電流（或電流落後電壓），電感性負載 $Q > 0$

⑵若（$\alpha - \beta$）< 0 ⇒ 電流超前電壓（越前功因），電容性負載 $Q < 0$

⑶若（$\alpha - \beta$）$= 0$ ⇒ 電流與電壓同相位，電阻性負載 $Q = 0$

經典試題

1、試求各負載所吸收之功率及總功率：



$Z_1 = 60 + j0$（Ω）

$Z_2 = 6 + j12$（Ω）

$Z_3 = 30 - j30$（Ω）

Sol $\overrightarrow{S_1} = \dfrac{|V|^2}{\overrightarrow{Z_1}*} = \dfrac{(1200)^2}{60} = 24000 + j0$（$VA$）

$\overrightarrow{S_2} = \dfrac{|V|^2}{\overrightarrow{Z_2}*} = \dfrac{(1200)^2}{6-j12} = 48000 + j96000$（$VA$）

$\overrightarrow{S_3} = \dfrac{|V|^2}{\overrightarrow{Z_3}*} = \dfrac{(1200)^2}{30+j30} = 24000 - j24000$（$VA$）

故總功率：$\overrightarrow{S_T} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3} = 96000 + j72000$（$VA$）

2、1ϕ 負載之端電壓為 $v(t) = 200cos(377t)$，其所造成之瞬時功率為：

$P(t) = 800 + 1000cos(754t - 36.87°)$

⑴求供應負載之複功率。

⑵求供應負載之瞬時電流及電流之均方根值。

⑶負載阻抗。

Sol ⑴ $P(t) = 800 + 1000(cos754t\ cos36.87° + sin754t\ sin36.87°)$

$= 800(1 + cos754t) + 600sin754t$

$= P(1 + cos2\omega t) + Q\ sin2\omega t$

$\overrightarrow{S} = P + jQ = 800 + j600 = 1000\angle 36.87°$

⑵ $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{V}\ \overrightarrow{I}*$

$1000\angle 36.87° = 100\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{I}*$

$\overrightarrow{I}* = \dfrac{10}{\sqrt{2}}\angle 36.87° \Rightarrow \overrightarrow{I} = \dfrac{10}{\sqrt{2}}\angle -36.87°$

$\therefore i(t) = 10cos(377t - 36.87°)$

⑶ $\overrightarrow{Z} = \dfrac{\overrightarrow{V}}{\overrightarrow{I}}$，$\overrightarrow{S} = \dfrac{|V|^2}{\overrightarrow{Z}*}$

$1000\angle 36.87° = \dfrac{(100\sqrt{2})^2}{\overrightarrow{Z}*}$

$\overrightarrow{Z}* = 20\angle -36.87°$ $\therefore \overrightarrow{Z} = 20\angle 36.87° = 18 + j12$（$\Omega$）

3、有三個並聯之負載由 220V（rms）的線路所供應，其中負載 1 吸收 10kW 及 6$kVAR$，負載 2 在超前（$leading$）的功因 0.8 下吸收 8kVA，負載 3 在單位功因下吸收 12kW，試求：

⑴此三個並聯負載之合成複數功率 S_{Total}（kVA）。

⑵串聯電阻 R 與電抗 X 組合之等效阻抗，其中電阻（Ω）為多少？

⑶承⑵題，電抗（Ω）為多少？

⑷並聯電阻 R 與電抗 X 組合之等效阻抗，其中電阻（Ω）為多少？

⑸承⑷題，其電抗（Ω）為多少？　【台電】

Sol 負載 1：$P_1 = 10kW$，$Q_1 = 6kVAR$

負載 2：$P_2 = S_2 \cos\theta = 8 \times 0.8 = 6.4$（$kW$）

$Q_2 = S_2 \sin\theta = 8 \times 0.6 = 4.8$（$kVAR$）

負載 3：$P_3 = 12kW$，$Q_3 = 0$

⑴複功率 $\overrightarrow{S_T} = (10 + 6.4 + 12) + j(6 - 4.8) = 28.4 + j1.2$（$kVA$）

⑵⑶$\because \overrightarrow{S_T} = \dfrac{|V|^2}{\overrightarrow{Z}*} \Rightarrow (28.4 + j1.2) \times 10^3 = \dfrac{(220)^2}{R - jX}$

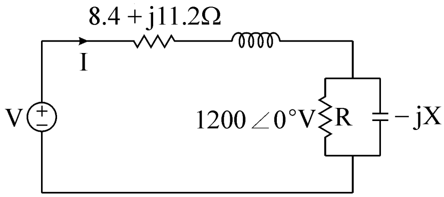
$\therefore R - jX = \dfrac{(220)^2}{(28.4 + j1.2) \times 10^3} = 1.701 - j0.072$

故 $R = 1.701$（Ω），$X = 0.072$（Ω）

⑷⑸$\because \overrightarrow{S_T} = \dfrac{|V|^2}{\overrightarrow{Z_1}*} + \dfrac{|V|^2}{\overrightarrow{Z_2}*} = \dfrac{(220)^2}{R} + \dfrac{(220)^2}{-jX} = (28.4 + j1.2) \times 10^3$

$\therefore R = \dfrac{(220)^2}{28.4 \times 10^3} = 1.704$（Ω），$X = \dfrac{(220)^2}{1.2 \times 10^3} = 40.33$（Ω）

4、如圖所示的負載係由一電阻為 R 及電抗為 X 的電容器並聯組成。此負載由一單相電源透過一阻抗為 $8.4 + j11.2\Omega$ 的線路供電



。負載端的均方根值電壓為 $1200\angle 0°V_{rms}$，且此負載吸取 $30kVA$ 的電力，功率因數為 0.8 超前。

⑴試求 R 及 X 的值；⑵試決定電源電壓 V。

Sol 負載之功因率為 0.8，則：$\theta = cos^{-1}0.8 = 36.87°$

而負載之複功率為：

$\vec{S} = 30\angle -36.87° = 24\,(kW) - j18\,(kVAR) = P + jQ$

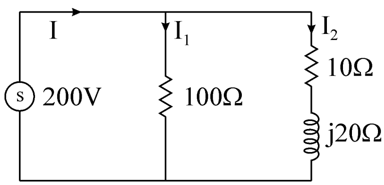
⑴ $R = \dfrac{|V|^2}{P} = \dfrac{(1200)^2}{24000} = 60\,(\Omega)$，$X = \dfrac{|V|^2}{Q} = \dfrac{(1200)^2}{18000} = 80\,(\Omega)$

⑵ 負載電流 $\vec{I} = \dfrac{\vec{S}*}{\vec{V}*} = \dfrac{30000\angle 36.87°}{1200\angle 0°} = 25\angle 36.87\,(A)$

故電源電壓 $V = 1200\angle 0° + 25\angle 36.87°(8.4 + j11.2) = 1200 + j350$

$= 1250\angle 16.26°\,(V)$

5、二個負載，阻抗分別為 $Z_1 = 100 + j0\Omega$ 及 $Z_2 = 10 + j20\Omega$，被連接到一個 $200V$、$60Hz$ 的電源，如圖所示。試求電源端的總實功率與虛功率、功率因數及總電流。



【地方三等】

Sol 負載 1 之複功率 $\vec{S_1} = \dfrac{|V|^2}{\vec{Z_1}*} = \dfrac{(200)^2}{100} = 400 + j0\,(VA)$

負載 2 之複功率 $\vec{S_2} = \dfrac{|V|^2}{\vec{Z_2}*} = \dfrac{(200)^2}{10 - j20} = 800 + j1600\,(VA)$

∴電源端之總實功率 $P = P_1 + P_2 = 1200\,(W)$

電源端之總虛功率 $Q = Q_1 + Q_2 = 1600\,(VAR)$

電源端之總功率因數 $cos\theta = \dfrac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = 0.6$（落後）

電源端之總電流 $\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2} = 1200 + j1600 = \vec{V}\ \vec{I}*$

$\Rightarrow \overrightarrow{I} = 6 - j8 = 10\angle -53.1°$（$A$）

6、每相阻抗為 $0.5 + j2\Omega$ 的三相輸電線，供應兩個以並聯方式連接的平衡三相負載；其中第一個負載其視在功率為 $200kVA$，功率因數 0.6 落後，第二個負載為△接，每相阻抗為 $150 - j60\Omega$。在負載端之線至線電壓 V_{LL} 為 $5kV$，試求在電源側之線至線電壓值。【101.台電職員】

Sol 負載 1 之複功率 $\overrightarrow{S_1} = P_1 + jQ_1 = 200 \times 0.6 + j200 \times 0.8$

$= 120$（kW）$+ j160$（$kVAR$）

負載 2 之複功率 $\overrightarrow{S_2} = \dfrac{3|V_L|^2}{\overrightarrow{Z_\triangle}^*} = \dfrac{3(5000)^2}{150 + j60}$

$= 431$（kW）$- j172.4$（$kVAR$）

故負載之總複功率 $\overrightarrow{S_L} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} = 551$（$kW$）$- j12.4$（$kVAR$）

$= 3\overrightarrow{V_P}\ \overrightarrow{I_P}^* = 3 \times \dfrac{5000}{\sqrt{3}}\overrightarrow{I_L}^*$

負載端電流 $\overrightarrow{I_L} = 63.624 + j1.4318$（$A$）

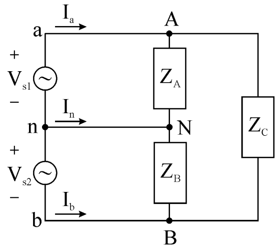
電源側之相電壓 $V = \dfrac{5000}{\sqrt{3}}\angle 0° +$（$0.5 + j2$）$\times \overrightarrow{I_L}$

$= 2886.75\angle 0° +$（$0.5 + j2$）（$63.624 + j1.4318$）

$= 2915.7 + j127.964 = 2918.5\angle 2.513°$（$V$）

故電源側之線至線電壓 $2918.5 \times \sqrt{3} = 5055$（$V$）

7、如圖所示之單相、三線、$60Hz$ 之家用配電系統，其單相電源經由三條短路線供應三個單相負載 Z_A、Z_B、Z_C。已知電壓相量 $V_{s1} = V_{s2} = 120\angle°V$，$Z_A$ 為 10Ω 電燈負載、Z_B 為 10Ω 電阻器串聯 $15mH$ 電感器、Z_C 為 30Ω 電熱器負載。試求：



⑴電流相量 I_a、I_b、I_n。

⑵兩電壓源 V_{s1}、V_{s2} 吸收或放出的實功及虛功。

⑶電路的整體功率因數。 【102.高考】

Sol ⑴ $\vec{I}_a = \dfrac{\vec{V}_{s1}}{\vec{Z}_A} + \dfrac{\vec{V}_{s1}+\vec{V}_{s2}}{\vec{Z}_c} = \dfrac{120\angle 0°}{10} + \dfrac{240\angle 0°}{30} = 20\angle 0°\ (A)$

$$\vec{I}_b = -\frac{\vec{V}_{s2}}{\vec{Z}_B} - \frac{\vec{V}_{s1}+\vec{V}_{s2}}{\vec{Z}_c} = -\frac{120\angle 0°}{10+j377\times 15\times 10^{-3}} - \frac{240\angle 0°}{30}$$

$$= -\frac{120}{11.5\angle 29.5°} - 8 = -17.08 + j5.137 = 17.835\angle 163.26°\ (A)$$

$$\vec{I}_n = \frac{\vec{V}_{s2}}{\vec{Z}_B} - \frac{\vec{V}_{s1}}{\vec{Z}_A} = \frac{120\angle 0°}{11.5\angle 29.5°} - 12 = -2.92 - j5.137$$

$$= 5.908\angle -119.61°\ (A)$$

⑵ $\vec{V}_{s1}\ \vec{I}_a^{\,*} = 120\angle 0° \times 20\angle -0° = 2400\ (W)$

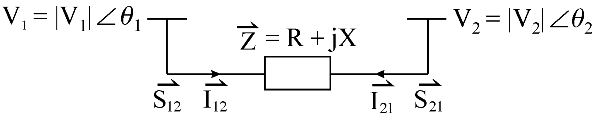
$\vec{V}_{s2}\,(-\vec{I}_b)^* = 120\angle 0° \times (17.08 + j5.137) = 2409.6 + j616.44$

∴ V_{s1} 放出（供給）有效功率 2400（W），虛功率 0（VAR）

V_{s2} 放出（供給）實功率 2409.6（W），供給虛功率 616.44（VAR）

⑶ $\cos\theta = \dfrac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \dfrac{4809.6}{\sqrt{(4809.6)^2+(616.44)^2}} = 0.9918$（落後）

◉兩匯流排間功率之傳輸



$\vec{Z} = R + jX = |Z|\angle\theta \Rightarrow |Z| = \sqrt{R^2+X^2}$，$\theta = \tan^{-1}\dfrac{X}{R}$

$$\vec{I}_{12} = \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}_2}{\vec{Z}} = \frac{|V_1|\angle\theta_1 - |V_2|\angle\theta_2}{|Z|\angle\theta}$$

$$\vec{S}_{12} = \vec{V}_1\ \vec{I}_{12}^{\,*} = |V_1|\angle\theta_1\left[\frac{|V_1|}{|Z|}\angle(-\theta_1+\theta) - \frac{|V_2|}{|Z|}\angle(-\theta_2+\theta)\right]$$

$$= \frac{|V_1|^2}{|Z|}\angle\theta - \frac{|V_1||V_2|}{|Z|}\angle(\theta + \theta_1 - \theta_2)$$

$$\overrightarrow{I_{21}} = \frac{\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}}{\overrightarrow{Z}} = \frac{|V_2|\angle\theta_2 - |V_1|\angle\theta_1}{|Z|\angle\theta} = \frac{|V_2|}{Z}\angle(\theta_2 - \theta) - \frac{|V_1|}{Z}\angle(\theta_1 - \theta)$$

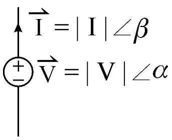
$$\overrightarrow{S_{21}} = \overrightarrow{V_2}\ \overrightarrow{I_{21}}^* = |V_2|\angle\theta_2 \cdot \left[\frac{|V_2|}{Z}\angle(-\theta_2 + \theta) - \frac{|V_1|}{Z}\angle(-\theta_1 - \theta)\right]$$

$$= \frac{|V_2|^2}{Z}\angle\theta - \frac{|V_2||V_1|}{|Z|}\angle(\theta + \theta_2 - \theta_1)$$

線路上之損失 $\overrightarrow{S_L} = \overrightarrow{S_{12}} + \overrightarrow{S_{21}}$

充電補給站

(1)

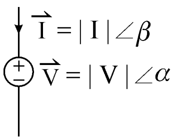


$$\vec{S} = \vec{V}\ \vec{I}^*$$
$$= |V|\,|I|\cos(\alpha - \beta) + j|V|\,|I|\sin(\alpha - \beta)$$
$$= P + jQ$$

若 $P > 0$ ⇒ 供給有效功率；$P < 0$ ⇒ 消耗有效功率

若 $Q > 0$ ⇒ 供給無效功率；$Q < 0$ ⇒ 消耗無效功率

(2)



$$\vec{S} = \vec{V}\ \vec{I}^*$$
$$= |V|\,|I|\cos(\alpha - \beta) + j|V|\,|I|\sin(\alpha - \beta)$$
$$= P + jQ$$

若 $P > 0$ ⇒ 消耗有效功率；$P < 0$ ⇒ 供給有效功率

若 $Q > 0$ ⇒ 消耗無效功率；$Q < 0$ ⇒ 供給無效功率

經典試題

1、試決定各電源所供應與接收之實虛功率及導線上之功率損失。